

Limity posloupností

5. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

Teorie:

VĚTA (Aritmetika limit)

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $A, B \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Pak platí, že:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, je-li výraz na pravé straně definován.
- Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo b_n nenulové, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, je-li výraz na pravé straně definován.

POZNÁMKA

Pro $x \in \mathbb{R}$ nejsou mj. definovány výrazy $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot \infty$, $-\infty \cdot 0$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\infty}{0}$.

VĚTA („Nulová“ krát omezená)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

VĚTA (O dvou strážnících)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$. Nechť $\exists n_0 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

POZNÁMKA (Znamé limity)

Platí, že

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Je-li $q \in (-1, 1)$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Je-li $q > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, a je-li $q \leq -1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ neexistuje.

VĚTA

Pro $A, B \in \mathbb{R}$ platí, že

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \dots + B^n.$$

Dále platí, že

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2} \cdot B + \dots + A \cdot B^{n-2} + B^{n-1}).$$

Tedy speciálně $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ a $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Příklady:

1. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan n+n}{n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 3 \cdot 3^n)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{n}$

2. Spočtěte následující limity posloupností (pokud existují):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6+7n^5-5}{50n^5-24n^2}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n+n \sin(2n)}{n \cos(3n)+(2n+\sin(4n))^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7^n + n^3 \cdot 5^n}{-3n \cdot 7^n + 6^n \cdot \sqrt{n}}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, kde $a, b, c > 0$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$